Cvičení 7 – Minimální kostry, vyhledávací stromy

Minimální kostry

Úloha 1 Jak hledání minimální kostry ovlivní záporné hrany nebo záporné cykly?

Úloha 2 Co kdybychom chtěli najít kostru maximální namísto minimální?

Úloha 3 Jak se zbavit předpokladu o unikátních vahách hran?

Úloha 4 *(Dynamická kostra)* Máme nalezenu minimální kostru a nyní chceme najít novou, pokud:

a) z grafu odstraníme hranu,
b) do grafu přidáme hranu,
c) snížíme váhu hrany, nebo
d) zvýšíme váhu hrany.

Na změnu stačí čas $\mathcal{O}(n)$.

Úloha 5 *(Mosty a kostry)* Dokažte, že mosty v grafu jsou právě ty hrany, které leží v průniku všech koster.

Lemma 1 (Řezové) *Nechť G je souvislý graf s unikátním ohodnocením hran a R elementární řez v G. Pak nejlehčí hrana řezu R leží v minimální kostře.*

Lemma 2 (Cyklové) *Nechť G je souvislý graf s unikátním ohodnocením hran a C cyklus v G. Pak nejtěžší hrana C neleží v minimální kostře.*

Úloha 6 Důkaz řezového lemmatu známe z přednášky. Dokažte cyklové lemma.

Jakub Komárek
komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz
https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/

Vyhledávací stromy

Úloha 7 *(Dokonalé vyvážení)* Navrhněte algoritmus, který ze setříděného pole vyrobí v lineárním čase dokonale vyvážený BVS.

Úloha 8 *(Operace)* Ukažte, jak s BVS implementovat následující operace, a určete časovou složitost:

a) Nalezení minimálního/maximálního klíče
b) Nalezení následníka pro zadaný vrchol
c) Nalezení k-tého nejmenšího prvku

Strom si můžete upravit, aby udržoval nějaké informace navíc.

Úloha 9 Dokažte, že projdeme-li celý strom opakovaným hledáním následníka, strávíme tím čas $\Theta(n)$.

Úloha 10 *(Join)* Navrhněte algoritmus, který dostane dva BVS T_1, T_2 a sloučí jejich obsah do jediného BVS. Algoritmus by měl pracovat v čase $\mathcal{O}(|T_1| + |T_2|)$. Jde to rychleji, pokud jsou všechny klíče v T_1 menší než všechny klíče v T_2?

Úloha 11 *(Split)* Navrhněte algoritmus, který dostane BVS T a hodnotu s, a rozdělí strom na dva BVS T_1 a T_2 takové, že hodnoty v T_1 jsou menší než s a hodnoty v T_2 jsou větší než s.

Jakub Komárek
komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz
https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/