Cvičení 6 – Nejkratší cesty

Z minula

Úloha 1 *(Nejdelší cesty)* Na vstupu máme acyklický orientovaný graf (DAG) s délkami hran $\ell : E \to \mathbb{R}^+$. Pro dané dva vrcholy u a v nalezněte počet nejdelších cest z u do v a jejich délku.

Úloha 2 *(Zelené vrcholy)* V orientovaném grafu jsou některé vrcholy obarvené zeleně. Jak zjistit, jestli existuje cyklus obsahující alespoň jeden zelený vrchol?

O řešení ostatních příkladů z minula si případně řekněte.

Nejkratší cesty

Úloha 3 *(Odzápornění)* Lze se v algoritmech na hledání nejkratší cesty zbavit záporných hran tím, že ke všem ohodnocením hran přičteme nějaké velké číslo K?

Úloha 4 *(Dijkstra a záporné hrany)* Najděte orientovaný ohodnocený graf s jednou zápornou hranou a bez záporného cyklu, na němž Dijkstrův algoritmus „selže", tedy buď nenajde nejkratší cestu, nebo musí otevřít nějaký vrchol opakovaně.

Úloha 5 *(Ohodnocení vrcholů)* Na mapě města jsme přiřadili každé silnici čas na průjezd a každé křižovatce průměrnou dobu čekání na semaforech. Jak hledat nejrychlejší cestu?

Úloha 6 *(Mnoho nejkratších cest)* Ukažte, jak pro libovolné n sestrojit graf na nejvýše n vrcholech, v němž mezi nějakými dvěma vrcholy existuje $2^{\Omega(n)}$ nejkratších cest.

Úloha 7 *(Dvě kritéria)* Silnice v mapě máme ohodnocené dvěma čísly: délkou a mýtem (poplatkem za projetí). Jak najít nejlevnější z nejkratších cest?

Jakub Komárek
komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz
`https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/`

Úloha 8 *(Prefixová vlastnost)* Dokažte, že pro nejkratší cesty platí takzvaná prefixová vlastnost: Nechť P je nějaká nejkratší cesta z v_0 do w a t je nějaký vrchol na této cestě. Poté úsek (prefix) cesty P z v_0 do t je jednou z nejkratších cest z v_0 do t.

Úloha 9 *(Strom nejkratších cest)* Dokažte, že pro libovolný ohodnocený graf a počáteční vrchol v_0 existuje strom nejkratších cest z v_0. Může se hodit předchozí cvičení.

Úloha 10 *(Maximalizace minima)* Mějme mapu města ve tvaru orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme podle toho, jaký nejvyšší kamion po dané ulici může projet. Po cestě tedy projede maximálně tak vysoký náklad, kolik je minimum z ohodnocení jejích hran. Jak pro zadané dva vrcholy najít cestu, po níž projede co nejvyšší náklad?

Úloha 11 *(Nejpravděpodobnější cesta)* Počítačovou síť popíšeme orientovaným grafem, jehož vrcholy odpovídají routerům a hrany linkám mezi nimi. Pro každou linku známe pravděpodobnost toho, že bude funkční. Pravděpodobnost, že bude funkční nějaká cesta, je dána součinem pravděpodobností jejích hran. Jak pro zadané dva routery najít nejpravděpodobnější cestu mezi nimi?

Úloha 12 *(BF a záporné hrany)* Upravte Bellmanův-Fordův algoritmus, aby uměl detekovat záporný cyklus dosažitelný z výchozího vrcholu v_0.

Bonus: Uměli byste tento cyklus vypsat?

Jakub Komárek
komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz
https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/