Cvičení 4 – Prohledávání do hloubky

Příklady s BFS z minula

Úloha 1 *(BFS se zásobníkem)* Co by se stalo, kdybychom v BFS vyměnili frontu za zásobník, ale jinak algoritmus neměnili?

Úloha 2 *(Trhání vrcholů)* Mějme souvislý neorientovaný graf. Chceme nalézt nějaké pořadí odtrhávání vrcholů, že graf po každém odtrhnutí vrcholu zůstane souvislý.

Úloha 3 *(Nejkratší cesty)* Jak upravit BFS, aby bylo možné pro každý vrchol vypsat nějakou nejkratší cestu z v_0 (počátečního vrcholu BFS)? A jak určit počet nejkratších cest z v_0 do v pro každý vrchol v při zachování lineární časové složitosti?

(Počítání s velkými čísly pro jednoduchost zvládneme v čase $\mathcal{O}(1)$. Ostatně, jak velké mohou být ty počty nejkratších cest?)

Úloha 4 *(Kulhavý kůň)* Na jisté šachovnici žil kulhavý kůň. To je zvláštní šachová figurka, která v sudých tazích táhne jako jezdec, v lichých jako pěšec. Vymyslete algoritmus, který z jednoho zadaného políčka dokulhá na druhé na nejmenší možný počet tahů.

Prohledávání do hloubky

Úloha 5 *(Hledání cyklů)* Mějme neorientovaný graf G, v něm hranu e a vrchol v. Jak poznat, jestli G obsahuje

a) cyklus, který obsahuje hranu e?
b) cyklus, který obsahuje vrchol v?

> **Lemma 1** *Vrchol v* není artikulace $\Leftrightarrow$ *pro každé dva jeho sousedy $x \neq y$ existuje kružnice, která obsahuje hrany vx a vy.*

Jakub Komárek
komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz
https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/

Úloha 6 *(Artikulace)* Vymyslete algoritmus, který nalezne všechny artikulace v neorientovaném grafu.

Návod:

1. Rozmyslete, kdy je artikulací kořen DFS stromu.
2. Definujme relaci na hranách $e \approx f$, pokud $e = f$, nebo e a f leží na společné kružnici. Dokažte, že je to ekvivalence. Třídám této relace říkáme *bloky*.
3. Ukažte, že podmínku z lemmatu pro vrchol v stačí ověřit pro dvojice vrcholů (u, w), kde uv je stromová hrana nahoru z v a vw je stromová hrana dolů z v.
4. Ukažte, jak podmínku ověřit pomocí $in(v)$ a $low(v)$, upravte algoritmus na hledání mostů aby hledal artikulace.

Úloha 7* Dokažte, že pokud má graf na alespoň 3 vrcholech most, má i artikulaci. Ukažte, že obráceně to neplatí.

Topologické uspořádání

Úloha 8 *(Jednoznačnost TU)* Jakou vlastnost má graf, jehož topologické uspořádání je jednoznačné?

Úloha 9 *(Paralelní plánování)* Máme velký projekt, např. chceme postavit dům. Sestavíme si závislostní graf všech činností, které jsou potřeba. U každé činnosti si poznamenáme, jak dlouho bude (nejspíš) trvat. Máme k dispozici neomezeně mnoho pracovníků, takže můžeme vykonávat libovolně činností najednou, ale musíme dodržet závislosti (tedy než začneme nějakou činnost, musí být hotové všechny činnosti, na kterých závisí). Spočítejte pro každou činnost, kdy s ní začít, abychom projekt dokončili co nejdříve.

Úloha 10 *(Nejdelší cesty)* Na vstupu máme acyklický orientovaný graf (DAG) s délkami hran $\ell : E \to \mathbb{R}^+$. Pro dané dva vrcholy u a v nalezněte počet nejdelších cest z u do v a jejich délku.

Jakub Komárek
komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz
`https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/`