Cvičení 13 – Dynamické programování

Z minula

Úloha 1 *(Nekuchařkové rekurence)*

a) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$
b) $T(n) = T(n/3) + T(n/7) + n$

Úloha 2 *(Převod mezi soustavami)* Mějme n-ciferné číslo v soustavě o základu z a chceme ho převést do soustavy o jiném základu (z považujeme za konstantu). Ukažte, jak to metodou Rozděl a panuj zvládnout v čase $\mathcal{O}(M(n) \cdot \log n)$, kde $M(n)$ je čas potřebný na násobení n-ciferných čísel v soustavě o novém základu.

Úloha 3 *(Spletitý kabel)* Mějme dlouhý kabel, z jehož obou konců vystupuje po n drátech. Každý drát na levém konci je propojen s právě jedním na konci druhém a my chceme zjistit, který s kterým. K tomu můžeme používat následující operace:

i) přivést napětí na daný drát na levém konci,
ii) odpojit napětí z daného drátu na levém konci,
iii) změřit napětí na daném drátu na pravém konci.

Navrhněte algoritmus, který pomocí těchto operací zjistí, co je s čím propojeno. Snažte se počet operací minimalizovat.

Bonus* Umíte dokázat, že na asymptoticky menší počet operací úlohu vyřešit nelze?

Dynamické programování

Úloha 4 *(Kopec)* Kopcem nazveme podposloupnost, která nejprve roste a pak klesá. Vymyslete algoritmus, který v zadané posloupnosti nalezne nejdelší kopec. (Můžete používat algoritmy z přednášky.)

Jakub Komárek
komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz
https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/

Úloha 5 *(Počítání NRP)* Nejdelší rostoucích podposloupností může být v posloupnosti více. Jak spočítat, kolik různých nejdelších rostoucích podposloupností obsahuje zadaná posloupnost?

Úloha 6 *(Knihovna)* Mějme posloupnost n knih. Každá kniha má nějakou šířku s_i a výšku v_i. Knihy chceme naskládat do knihovny s nějakým (předem neurčeným) počtem polic tak, abychom dodrželi abecední pořadí. Prvních několik knih tedy půjde na první polici, další část na druhou polici, a tak dále. Máme zadanou šířku knihovny S a chceme rozmístit police tak, aby se do nich vešly všechny knihy a celkově byla knihovna co nejnižší. Tloušťku polic přitom zanedbáváme.

Úloha 7 *(Nejdelší společná podposloupnost)* Navrhněte algoritmus pro nalezení nejdelší společné podposloupnosti daných posloupností $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_m$. Jak tento problém souvisí s editační vzdáleností? Jaký je grafový pohled na výsledný algoritmus?

Úloha 8 *(Násobení mnoha matic)* Násobíme-li matice $X \in \mathbb{R}^{a \times b}$ a $Y \in \mathbb{R}^{b \times c}$ podle definice, počítáme $a \cdot b \cdot c$ součinů čísel (používáme přímočarý algoritmus z definice násobení). Pokud chceme spočítat maticový součin $X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$, výsledek nezávisí na uzávorkování, ale časová složitost ano (pro jednoduchost ji budeme měřit počtem součinů čísel). Vymyslete algoritmus, který stanoví, jak výraz uzávorkovat, abychom počet součinů čísel minimalizovali.

Jakub Komárek
komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz
https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/