

Cvičení 12 – Rekurence

Věta (Kuchařková). *Rekurentní rovnice $T(n) = a \cdot T(n/b) + \Theta(n^c)$, $T(1) = 1$ má pro konstanty $a \geq 1, b > 1, c \geq 0$ řešení:*

- $T(n) = \Theta(n^c \log n)$, pokud $a/b^c = 1$;
- $T(n) = \Theta(n^c)$, pokud $a/b^c < 1$;
- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, pokud $a/b^c > 1$.

Úloha 1 (*Rekurence*) Vyřešte následující rekurence (kde vždy máme $T(1) = 1$):

- $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$
- $T(n) = 16T(n/4) + \Theta(n)$
- $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$
- $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$
- $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^3)$
- $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^3)$
- $T(n) = 9T(n/2) + \Theta(n^3)$

Úloha 2 (*Nekuchařkové rekurence*)

- $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$
- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$
- $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$
- $T(n) = T(n/3) + T(n/7) + n$

Úloha 3 (*Převod mezi soustavami*) Mějme n -ciferné číslo v soustavě o základu z a chceme ho převést do soustavy o jiném základu (z považujeme za konstantu). Ukažte, jak to metodou Rozděl a panuj zvládnout v čase $\mathcal{O}(M(n) \cdot \log n)$, kde $M(n)$ je čas potřebný na násobení n -ciferných čísel v soustavě o novém základu.



Jakub Komárek

komarek+ads1@iuuk.mff.cuni.cz

<https://jakoma02.cz/teaching/ls24/ads1/>

Úloha 4 (*Spletitý kabel*) Mějme dlouhý kabel, z jehož obou konců vystupuje po n drátech. Každý drát na levém konci je propojen s právě jedním na konci druhém a my chceme zjistit, který s kterým. K tomu můžeme používat následující operace:

- i) přivést napětí na daný drát na levém konci,
- ii) odpojit napětí z daného drátu na levém konci,
- iii) změřit napětí na daném drátu na pravém konci.

Navrhněte algoritmus, který pomocí těchto operací zjistí, co je s čím propojeno. Snažte se počet operací minimalizovat.

Bonus* Umíte dokázat, že na asymptoticky menší počet operací úlohu vyřešit nelze?

Úloha 5 (*Vylepšená kuchařka*) Vylepšete Kuchařkovou větu, aby pokrývala případy, kdy se velikosti podproblémů liší o konstantu, tedy $T(n) \leq aT(n/b + k) + \Theta(n^c)$ pro konstantu k .

Úloha 6 (*Hanoj*) V úloze Hanojských věžích máme 3 sloupce A, B, C, přičemž sloup A obsahuje n disků v pořadí dle jejich průměru (největší dole, nejmenší nahoře). Jak přemístit všechny disky ze sloupce A na B, přičemž je zakázáno položit větší disk na menší? Kolik přesunů musíme udělat?

Úloha 7 (*Hanoj 2*) Přidejme k Hanojským věžím ještě jedno pravidlo: je zakázáno přenášet disky přímo ze sloupce A na B nebo opačně (každý přesun se tedy musí uskutečnit přes sloup C). I nyní je problém řešitelný. Jak a s jakou časovou složitostí?

